104016 – פתרון זמני לבוחן אמצע, 18/5/14

שאלה מס' 1 : (15 נקודות)

יהי $z \in C$, כך ש $z \neq 0$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה: $\left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = -1$.

רשמו את הפתרונות בייצוגם האלגברי.

$$\left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = 1 \cdot cis(180^\circ)$$

נלוקח שורש:

$$\Rightarrow \frac{z+i}{z} = cis(60 + 120k) \quad k=0,1,2$$

מקרה 1

$$\frac{z+i}{z} = cis60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z+i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

$$\Rightarrow i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1} = +\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

מקרה 2

$$\frac{z+i}{z} = cis(180^\circ) = -1$$

$$\Rightarrow z+i = -z$$

$$\Rightarrow 2z = -i$$

$$\Rightarrow z = -\frac{i}{2}$$

מקרה 3

$$\frac{z+i}{z} = cis(300^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z+i = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

$$\Rightarrow i = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

סה"כ: $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \ -\frac{1}{2}i$

שאלה מס' 2 : (25 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה בארבעה נעלמים ממשיים x,y,z,w כאשר a,b פרמטרים ממשיים.

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ bx+ay+bz+aw=1 \\ ax+by+az+bw=1 \\ ax+ay+bz+bw=1 \end{cases}$$

א. לאילו ערכים של a,b אין למערכת פתרון?

ב. לאילו ערכים של a,b יש למערכת פתרון יחיד?

ג. לאילו ערכים של a,b יש למערכת אינסוף פתרונות?

ד. נתון ש $a=3$ ולמערכת יש פתרון. מצאו פתרון פרטי שבו $x+2z=10$.

לדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & a & 1 \\ a & b & a & b & 1 \\ a & a & b & b & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_{3,4}\to R_{3,4}-aR_1]{R_2\to R_2-bR_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & a-b & 1-b \\ 0 & b-a & 0 & b-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-a & b-a & 1-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & a-b & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-b \\ 0 & 0 & b-a & b-a & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & a-b & 1-b \\ 0 & 0 & b-a & b-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-b \end{array}\right)$$

א. $2-a-b\neq 0$ אין פתרון.

ב. $a+b=2$ אינסוף פתרונות. בפרט:

$a=b=1$ אינסוף לפי 3 נ"מ. } לא תלוי לפרט

$a\neq b$ $(a\neq 1,\ b\neq 1)$ אינסוף לפי 1 נ"מ } כי לא בי קשר.

ג. פתרון יחיד לא מתקבל.

ד. $a=3 \Leftarrow b=-1$ המט':

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{קנונית}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כמו כן גם:

$$\begin{cases} x-w=0 \\ y+w=1/2 \\ z+w=1/2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (x,y,z,w)=(w,\ 1/2-w,\ 1/2-w,\ w).$$

$$x+2z=10 \Longrightarrow$$

$$w+2(1/2-w)=10.$$

$$-w+1=10$$

$$w=-9.$$

$$(x,y,z,w)=(-9,\ 9\tfrac{1}{2},\ 9\tfrac{1}{2},\ -9)$$

שאלה מס' 3 : (21 נקודות)

יהי $V = R_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2.

נגדיר את שני תת המרחבים הבאים של V:

$$U = \{p(x) \in V \mid p'(2) = 0\}$$
$$W = sp\{1-5x+2x^2\ ,\ 1-3x\ ,\ x-x^2\}$$

א. הוכיחו כי U תת מרחב של V.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- U ול- W.

ג. הוכיחו כי $V = U + W$. האם הסכום הזה סכום ישר?

(א) * $0 \in U$ כי $0' \equiv 0$

* אם $p(x), q(x) \in U$ אז $(p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x)$

(מכונו גזירה) ! $p'(2)+q'(2)=0$

$p(x), q(x) \in U$.

* יש $p(x) \in U$! $\alpha \in \mathbb{R}$, אז

$(\alpha p(x))' = \alpha p'(x)$

(מכונו גזירה) ! $\alpha p'(2) = 0$ כי $\alpha p(x) \in U$

לכן U תת מרחב של V.

(ב) בסיס ל- U:

$a+bx+cx^2 \in U \iff$

$b+2c\cdot 2=0$

נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$0\cdot a+1\cdot b+4c=0$

$\iff b=-4c$, a חופשי

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-4c\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$

שני הוקטורים בלתי תלויים לינארית $\Leftarrow$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב הפתרונות (פורש ע"י וקטורי הסקלרים)

הקואורדינטות של וקטורי U לפי הבסיס הנ"ל

$\Leftarrow$ $\{1,\ -4x+x^2\}$ בסיס ל- U , $\dim U=2$

בסיס ל-W: נמצא בסיס לתת של $\mathbb{R}^3$ הנפרש ע"י וקטורי הקואורדינטות של הפולינומים הנתונים לפי הבסיס הסטנדרטי.

$\begin{pmatrix}1&-5&2\\1&-3&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{גאוס}}\begin{pmatrix}1&-5&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

לכן: $\{1-5x+2x^2,\ 2x-2x^2\}$ בסיס ל-W

ג. $W+U$ ת"מ של V.

מצד אחד הבסיסים (עקרון קבוע של) U ושל W

יחד מפרשים ל- $\dim(U+W)=3$

$=\dim V$

ולכן: $U+W=V$, אבל

$\dim(U+W)=3\neq 2+2=\dim U+\dim W$

לכן הסכום אינו סכום ישר.

(אולי: לפי משפט הימ' מתקיים

$\dim(U\cap W)=2+2-3=1\neq 0$ ולכן

הסכום אינו ישר).

שאלה מס' 4 : (18 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל F, ויהיו v_1, v_2, u, w וקטורים שונים מ- 0 ב- V . נתון כי:

$$sp\{v_1 , v_2 , u+w\} \subseteq sp\{v_1 , v_2 , u\}$$

א. הוכח $w \in sp\{v_1 , v_2 , u\}$.

ב. הוכח שאם בנוסף נתון כי $w \notin sp\{v_1 , v_2\}$ אז $u \in sp\{v_1 , v_2 , w\}$.

ג. הוכח שאם $\{v_1 , v_2 , u\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית אז גם הקבוצה $\{v_1+u , v_1-2v_2+3u , v_1-2u\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.

(א) מהנתון: $u+w \in sp\{v_1, v_2, u\} \Rightarrow u+w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u$

כלומר: $\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + (\alpha_3 - 1) u$

$w \in sp\{v_1, v_2, u\}$

(ב) מ"ל $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 u$ שעל"מ נוכל מסעיף (א)

לא יתכן ש- $\beta_3 = 0$ אחרת הנתון הנ"ל.

לכן מ- $\beta_3 u = -\beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 + w$ נוכל להסיק:

$$u = -\frac{\beta_1}{\beta_3} v_1 - \frac{\beta_2}{\beta_3} v_2 + \frac{1}{\beta_3} w$$

כלומר, $u \in sp\{v_1, v_2, w\}$

(ג) אם $\alpha_1(v_1+u) + \alpha_2(v_1-2v_2+3u) + \alpha_3(v_1-2u) = 0$

אז $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) v_1 + -2\alpha_2 v_2 + (\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3) u = 0$

מאחר ש- $\{v_1, v_2, u\}$ בת"ל

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

לאחר פתרון זו המערכת היחידה הוא $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

מ.ש.ל.

שאלה מס' 5 : (6 נקודות)

יהיו A ו- B שתי מטריצות מסדר $n\times n$ השונות מ- 0 ומקיימות $AB=0$, אז בהכרח

א. $(A+B)^2=A^2+B^2$.

ב. $BA=0$.

ג. אם C שקולת שורות ל- A אז גם $CB=0$.

ד. אם A סימטרית אז B אנטי סימטרית.

ה. $A^2B=BA^2$.

שאלה מס' 6 : (6 נקודות)

תהי $A\overline{x}=0$ מערכת משוואות הומוגנית של 3 משוואות ו- 5 נעלמים $x_1,\dots,x_5$, אז בהכרח:

א. קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1+x_2\neq 0$.

ב. קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_4=x_5=0$.

ג. קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_2\neq 0$ וגם $x_3\neq 0$.

ד. קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1+x_3+x_5=0$.

ה. קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי שבו $x_1=0$.

שאלה מס' 7 : (6 נקודות)

יהי $V=R^{n\times n}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n\times n$, $n\geq 3$. סמנו את הקבוצה המהווה תת מרחב וקטורי של V:

א. כל המטריצות ב- V מדרגה קטנה או שווה ל- $n-1$.

ב. כל המטריצות ב- V שהן אלכסוניות או משולשות עליונות.

ג. כל המטריצות ב- V שהן סימטריות או אנטי סימטריות.

ד. כל המטריצות ב- V שהן מדורגות.

ה. כל המטריצות ב- V שהן הקנוניות.